

### Задание 1.

Провести полное исследование функции и построить ее график:  $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$ .

#### Решение.

Разложим знаменатель на простые множители.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 1$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$$

$$y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3} = \frac{4}{(x + 3)(x - 1)}$$

1) Областью определения функции являются все значения переменной  $x \in R$ , кроме точек  $x = -3$  и  $x = 1$ , в которых знаменатель обращается в ноль, т.е.

$$D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, +\infty).$$

2) Функция терпит разрыв в точках  $x = -3$  и  $x = 1$ , вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{4}{(x+3)(x-1)} = \frac{4}{(-3-0+3)(-3-1)} = \frac{4}{-0 \cdot (-4)} = -\frac{1}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{4}{(x+3)(x-1)} = \frac{4}{(-3+0+3)(-3-1)} = \frac{4}{+0 \cdot (-4)} = -\frac{1}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{4}{(x+3)(x-1)} = \frac{4}{(1+3)(1-0-1)} = \frac{4}{4 \cdot (-0)} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{4}{(x+3)(x-1)} = \frac{4}{(1+3)(1+0-1)} = \frac{4}{4 \cdot (+0)} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Получили, что  $x = -3$  и  $x = 1$  – точки разрыва второго рода, функция имеет вертикальные асимптоты  $x = -3$  и  $x = 1$ .

3) Исследуем функцию на четность и нечетность:

$$y(-x) = \frac{4}{(-x)^2 + 2(-x) - 3} = \frac{4}{x^2 - 2x - 3} \neq \pm y(x).$$

Следовательно, функция является функцией общего вида.

4) Найдем экстремумы и интервалы возрастания и убывания функции. Для этого вычислим первую производную и приравняем ее к нулю:

$$y' = \left( \frac{4}{x^2 + 2x - 3} \right)' = \frac{(x^2 + 2x - 3) \cdot 4' - 4 \cdot (x^2 + 2x - 3)'}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{(x^2 + 2x - 3) \cdot 0 - 4 \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x - 3)^2} =$$

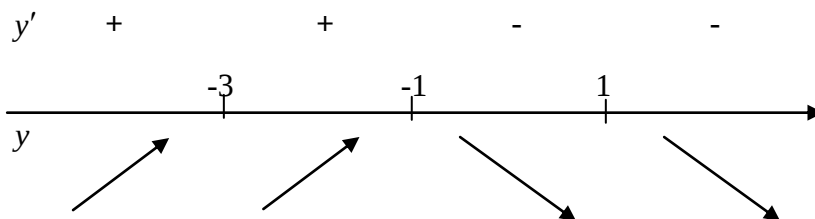
$$= -\frac{8(x+1)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = -\frac{8(x+1)}{(x+3)^2(x-1)^2} = 0.$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

Получили одну критическую точку  $x=-1$ .

Мы имеем также точки  $x=-3$  и  $x=1$ , в которых знаменатель первой производной обращается в ноль. Исследуем знак производной на интервалах, на которые эти точки делят область определения функции.



Функция возрастает на интервалах  $(-\infty, -3)$ ,  $(-3, -1)$ .

Функция убывает на интервалах  $(-1, 1)$ ,  $(1, +\infty)$ .

При переходе через точку  $x=-1$   $y'$  меняет знак с «+» на «-», следовательно, точка  $x=-1$  является точкой максимума функции, причем  $f(-1)=-1$ .

5) Найдем интервалы выпуклости функции и точки перегиба. Вычислим вторую производную функции и приравняем ее к нулю:

$$y'' = (y')' = -8 \cdot \left( \frac{x+1}{(x^2 + 2x - 3)^2} \right)' = -8 \cdot \frac{(x^2 + 2x - 3)^2 \cdot (x+1)' - (x+1) \cdot ((x^2 + 2x - 3)^2)'}{(x^2 + 2x - 3)^4} =$$

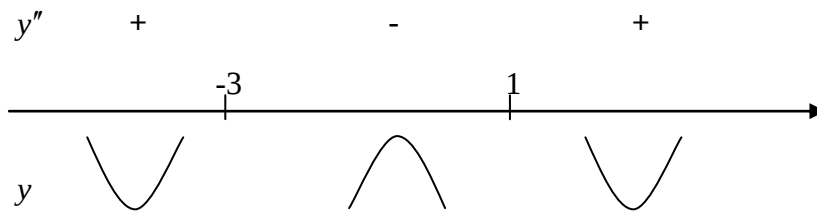
$$= -8 \cdot \frac{(x^2 + 2x - 3)^2 \cdot 1 - (x+1) \cdot 2(x^2 + 2x - 3)(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 3)^4} = -8 \cdot \frac{(x^2 + 2x - 3) - 4(x+1)^2}{(x^2 + 2x - 3)^3} =$$

$$= -8 \cdot \frac{x^2 + 2x - 3 - 4x^2 - 8x - 4}{(x^2 + 2x - 3)^3} = 8 \cdot \frac{3x^2 + 6x + 7}{(x^2 + 2x - 3)^3} = 8 \cdot \frac{3x^2 + 6x + 7}{(x+3)^3(x-1)^3} = 0.$$

$$3x^2 + 6x + 7 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -48 < 0 \text{ - корней нет.}$$

Мы имеем точки  $x = -3$  и  $x = 1$ , в которых знаменатель второй производной обращается в ноль. Исследуем знак второй производной на интервалах, на которые критические точки делят область определения функции.



Кривая вогнута на интервалах  $(-\infty, -3)$  и  $(1, +\infty)$ .

Кривая выпукла на интервале  $(-3, 1)$ .

При переходе через точки  $x = -3$  и  $x = 1$   $y''$  меняет знак, но эти точки не принадлежат области определения функции.

6) Найдем наклонные асимптоты. Уравнения наклонных асимптот  $y = kx + b$ , где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

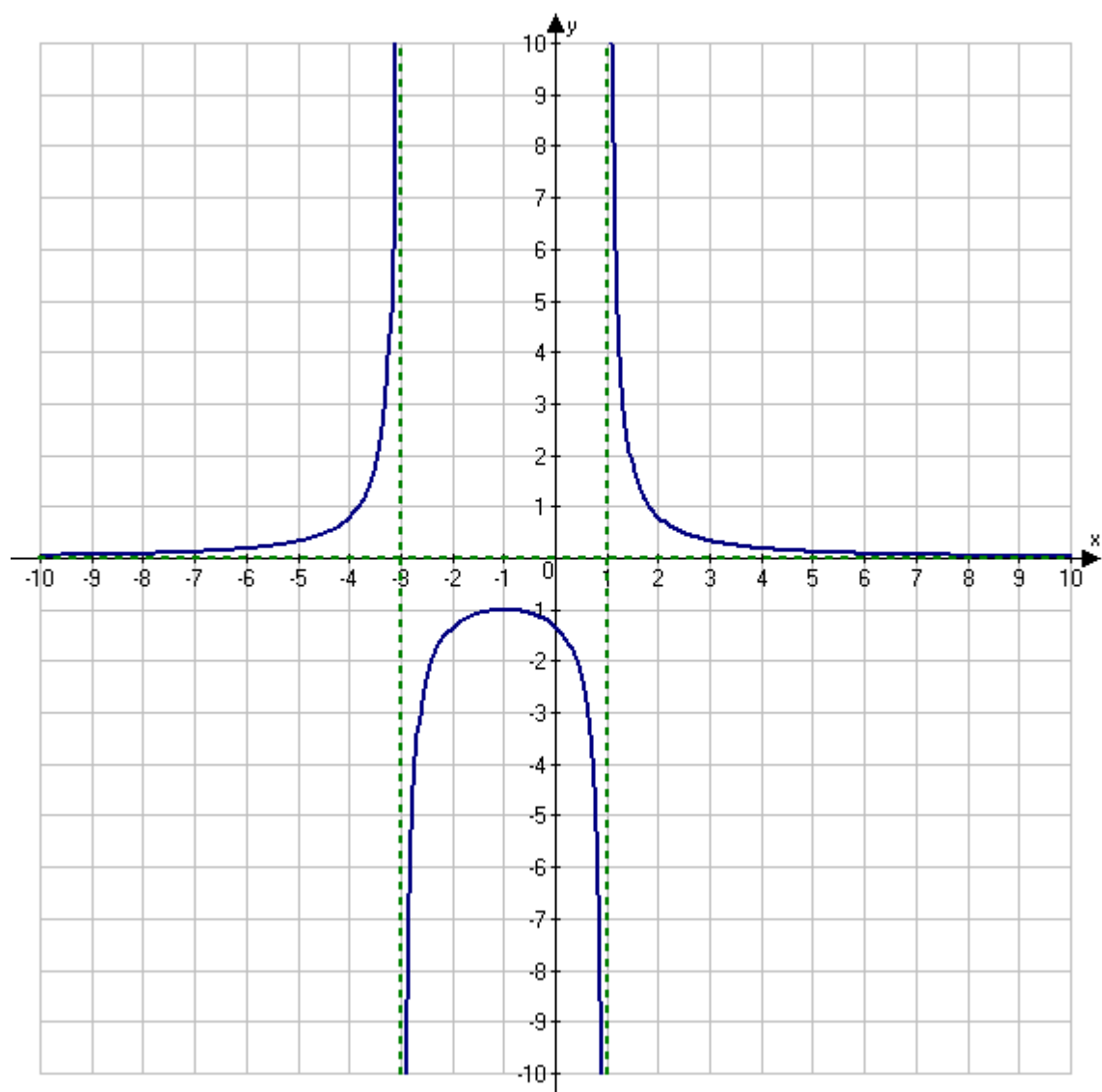
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x^3}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0 - 0} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0 - 0} = 0$$

Таким образом, график функции имеет горизонтальную асимптоту  $y = 0$ .

Выше мы нашли, что график также имеет две вертикальные асимптоты  $x = -3$  и  $x = 1$ .

7) Построим график функции.



## Задание 2.

Найдите  $|z|$ , если  $z = 5e^{i\pi} \cdot 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

### Решение.

Показательная форма комплексного числа  $z = x + iy$  имеет вид:

$$z = re^{i\varphi},$$

где  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  - модуль комплексного числа,  $\varphi$  - аргумент.

При умножении комплексных чисел в показательной форме их модули умножаются, их аргументы складываются.

Тогда получим:

$$z = 5e^{i\pi} \cdot 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 5 \cdot 3e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = 15e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

Тогда

$$|z| = 15.$$

### **Задание 3.**

Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 5}{x^2} dx$ .

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 5}{x^2} dx &= \int \frac{2x^3 - x^{5/2} + 5}{x^2} dx = 2 \int x dx - \int x^{1/2} dx + 5 \int x^{-2} dx = 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + 5 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \\ &= 2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{2x^{3/2}}{3} + 5 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = x^2 - \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{5}{x} + C. \end{aligned}$$

### **Задание 4.**

Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1} dx$ .

Решение.

$$\int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1} dx =$$

Сделаем замену:

$$u = \ln(3x+1)$$

$$du = \frac{3dx}{3x+1}$$

Тогда:

$$= \frac{1}{3} \int u^4 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{15} u^5 + C = \frac{1}{15} \ln^5(3x+1) + C.$$

### **Задание 5.**

Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx$ .

Решение.

$$\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx =$$

Сделаем замену:

$$u = \operatorname{arctg} 2x$$

$$du = \frac{2dx}{1+4x^2}$$

Тогда:

$$= \frac{1}{2} \int u^{1/5} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{1/5+1}}{1/5+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{5u^{6/5}}{6} + C = \frac{5}{12} u^{6/5} + C = \frac{5}{12} \operatorname{arctg}^{6/5} 2x + C.$$

### **Задание 6.**

Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$ .

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

Сделаем замену:

$$u = x - \frac{5}{2}$$

$$du = dx$$

Тогда:

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right| + C = \ln \left| x - \frac{5}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right| + C =$$

$$= \ln \left| x - \frac{5}{2} + \sqrt{x^2 - 5x + 6} \right| + C.$$

### **Задание 7.**

Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-4}}$ .

Решение.

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-4}} =$$

Сделаем замену:

$$u = x - 4$$

$$du = dx$$

Тогда:

$$= \int \frac{(u+4)^3 dx}{\sqrt{u}} = \int \frac{u^3 + 12u^2 + 48u + 64}{\sqrt{u}} du = \int (u^{5/2} + 12u^{3/2} + 48u^{1/2} + 64u^{-1/2}) du =$$

$$= \frac{2}{7}u^{7/2} + \frac{24}{5}u^{5/2} + 32u^{3/2} + 128u^{1/2} + C = \frac{2}{7}(x-4)^{7/2} + \frac{24}{5}(x-4)^{5/2} + 32(x-4)^{3/2} + 128\sqrt{x-4} + C.$$

### **Задание 8.**

Найти определенный интеграл  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$ .

Решение.

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x} =$$

Для вычисления интеграла применим универсальную тригонометрическую подстановку.

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=0 \Rightarrow t = \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$x=\pi \Rightarrow t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = +\infty$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{2dt}{t^2+5} = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dt}{t^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \left( \frac{t}{\sqrt{5}} \right) \Bigg|_0^b = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{\sqrt{5}} \right) - \operatorname{arctg} 0 \right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

### **Задание 9.**

Найти определенный интеграл  $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)(x+3)}$ .

Решение.

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)(x+3)} =$$

Разложим подынтегральную функцию в сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

$$\frac{x}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}$$

$$Ax+3A+Bx+2B=x$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=0 \end{cases}$$

$$A=1-B$$

$$3(1-B)+2B=0$$

$$B=3$$

$$A=1-3=-2$$

$$\frac{x}{(x+2)(x+3)} = -\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}$$

$$= -2 \int_0^1 \frac{dx}{x+2} + 3 \int_0^1 \frac{dx}{x+3} = -2 \int_0^1 \frac{d(x+2)}{x+2} + 3 \int_0^1 \frac{d(x+3)}{x+3} = (-2 \ln|x+2| + 3 \ln|x+3|) \Big|_0^1 =$$

$$= -2 \ln|1+2| + 3 \ln|1+3| + 2 \ln|0+2| - 3 \ln|0+3| = -2 \ln 3 + 3 \ln 4 + 2 \ln 2 - 3 \ln 3 =$$

$$= -5 \ln 3 + 3 \ln 4 + 2 \ln 2 = -5 \ln 3 + 3 \ln 4 + \ln 4 = 4 \ln 4 - 5 \ln 3 = \ln 4^4 - \ln 3^5 = \ln \left( \frac{4^4}{3^5} \right) = \ln \left( \frac{256}{243} \right).$$

### **Задание 10.**

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:  $\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ .

Решение.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{\pi} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{\pi} \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^b = \frac{1}{\pi} \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg b - \arctg 0) = \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}$$

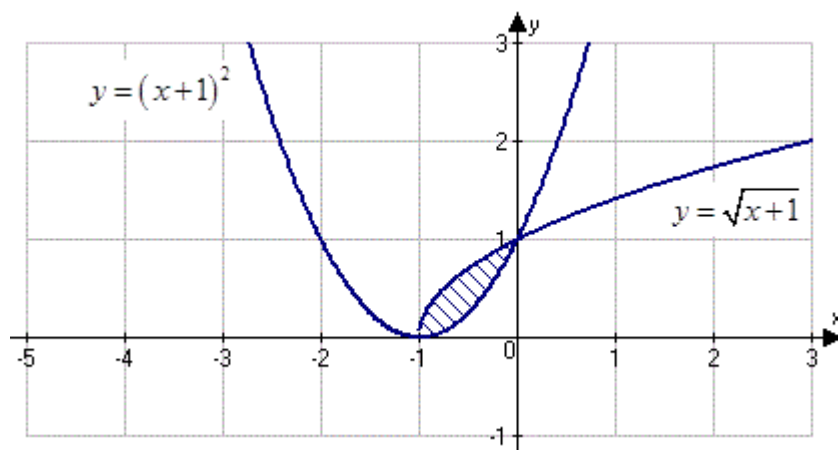
Итак, несобственный интеграл сходится и равен  $\frac{1}{2}$ .

### **Задание 11.**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y=(x+1)^2$ ,  $y=\sqrt{x+1}$ .

Решение.

Изобразим фигуру:



Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций  $y = (x+1)^2$  и  $y = \sqrt{x+1}$ :

$$(x+1)^2 = \sqrt{x+1}$$

$$(x+1)^4 = x+1$$

$$(x+1)((x+1)^3 - 1) = 0$$

$$a) \ x+1=0$$

$$x = -1$$

$$б) \ (x+1)^3 - 1 = 0$$

$$(x+1)^3 = 1$$

$$x+1=1$$

$$x = 0$$

Итак, фигура ограничена сверху графиком функции  $y = \sqrt{x+1}$ , снизу – графиком функции  $y = (x+1)^2$ , координата  $x$  изменяется от -1 до 0.

Вычислим площадь фигуры:

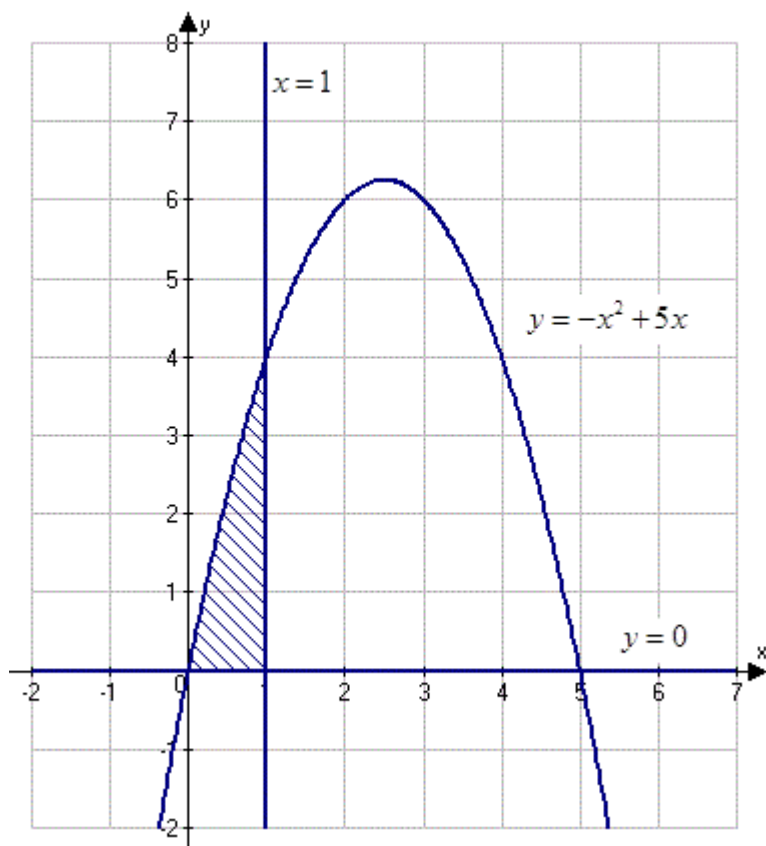
$$S = \int_{-1}^0 (\sqrt{x+1} - (x+1)^2) dx = \left( \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} - \frac{1}{3} (x+1)^3 \right) \Big|_{-1}^0 =$$
$$= \frac{2}{3} (0+1)^{3/2} - \frac{1}{3} (0+1)^3 - \frac{2}{3} (-1+1)^{3/2} + \frac{1}{3} (-1+1)^3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

### **Задание 12.**

Вычислить объем тела вращения вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной графиками функций  $y = -x^2 + 5x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ .

Решение.

Изобразим фигуру, вращением которой получается тело:



Заметим, что данные линии образуют две фигуры, будем считать, что необходимо найти объем тела, полученного вращением меньшей из фигур, то есть при  $0 \leq x \leq 1$ .

Объем тела, полученного при вращении вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линией  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Фигура ограничена сверху параболой  $y = -x^2 + 5x$ , снизу – прямой  $y = 0$ , координата  $x$  изменяется от 0 до 1.

Тогда объем тела вращения равен:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (-x^2 + 5x)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 10x^3 + 25x^2) dx = \pi \cdot \left( \frac{x^5}{5} - 10 \cdot \frac{x^4}{4} + 25 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \\ &= \pi \cdot \left( \frac{1}{5} - 10 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{181}{30} \pi \approx 18,95 \text{ куб. ед.} \end{aligned}$$

**Задание 13.**

Найти значения частных производных функции  $u = \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  в точке  $M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

Решение.

Сначала вычислим частные производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = -z \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 + y^2)^{-1/2} \right) = -z \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot (x^2 + y^2)^{-3/2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = \\ &= \frac{1}{2} z \cdot (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{xz}{(x^2 + y^2)^{3/2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = -z \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( (x^2 + y^2)^{-1/2} \right) = -z \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot (x^2 + y^2)^{-3/2} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = \\ &= \frac{1}{2} z \cdot (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2y = \frac{yz}{(x^2 + y^2)^{3/2}},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Теперь вычислим значение частных производных в точке  $M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})} = \frac{xz}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \bigg|_{M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\left( (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 \right)^{3/2}} = \frac{1}{4},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})} = \frac{yz}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \bigg|_{M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\left( (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 \right)^{3/2}} = \frac{1}{4},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \bigg|_{M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})} = -\frac{1}{\left( (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 \right)^{3/2}} = -\frac{1}{2}.$$

**Задание 14.**

Исследовать на экстремум функцию  $z = xy(12 - x - y)$ .

Решение.

$$z = xy(12 - x - y) = 12xy - x^2y - xy^2$$

Найдем стационарные точки заданной функции, то есть точки, в которых выполняется необходимое условие существования экстремума. Для функции двух переменных  $z = f(x, y)$

стационарные точки (координаты точек) находятся из системы 
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Для заданной функции  $\frac{\partial z}{\partial x} = 12y - 2xy - y^2$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 12x - x^2 - 2xy$ , и система примет вид:

$$\begin{cases} 12y - 2xy - y^2 = 0 \\ 12x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(12 - 2x - y) = 0 \\ x(12 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения получим:

$$y = 0 \text{ или } 12 - 2x - y = 0$$

$$y = 12 - 2x$$

Из второго уравнения получим:

$$x = 0 \text{ или } 12 - x - 2y = 0$$

$$x = 12 - 2y$$

Если  $x = 0$ , то  $y = 12$

Если  $y = 0$ , то  $x = 12$

$$3x = 12$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 12 - 2 \cdot 4 = 4$$

Получили четыре стационарные точки:  $(0, 0)$ ,  $(0, 12)$ ,  $(12, 0)$ ,  $(4, 4)$ .

Для проверки достаточных условий экстремума в стационарной точке необходимо

определить знаки определителя  $\Delta = AC - B^2$ , где  $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)}$ ,  $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}$ ,  $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)}$  в

этой точке.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12 - 2x - 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x.$$

Для точки  $(0,0)$  получим:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = -2 \cdot 0 = 0,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} = 12 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 12,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} = -2 \cdot 0 = 0,$$

$$\Delta = 0 \cdot 0 - 12^2 = -144 < 0,$$

Мы получили, что  $\Delta < 0$ , следовательно, в точке  $(0,0)$  функция экстремума не имеет.

Для точки  $(0,12)$  получим:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(0,12)} = -2 \cdot 12 = -24,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,12)} = 12 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 12 = -12,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(0,12)} = -2 \cdot 0 = 0,$$

$$\Delta = -24 \cdot 0 - (-12)^2 = -144 < 0,$$

Мы получили, что  $\Delta < 0$ , следовательно, в точке  $(0,12)$  функция экстремума не имеет.

Для точки  $(12,0)$  получим:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(12,0)} = -2 \cdot 0 = 0,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(12,0)} = 12 - 2 \cdot 12 - 2 \cdot 0 = -12,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(12,0)} = -2 \cdot 12 = -24,$$

$$\Delta = 0 \cdot (-24) - (-12)^2 = -144 < 0,$$

Мы получили, что  $\Delta < 0$ , следовательно, в точке  $(12,0)$  функция экстремума не имеет.

Для точки  $(4,4)$  получим:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \bigg|_{(4,4)} = -2 \cdot 4 = -8,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \bigg|_{(4,4)} = 12 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = -4,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \bigg|_{(4,4)} = -2 \cdot 4 = -8,$$

$$\Delta = (-8) \cdot (-8) - (-4)^2 = 48 > 0,$$

Мы получили, что  $\Delta > 0$  и  $A < 0$ , следовательно, в точке  $(4, 4)$  функция имеет максимум, который равен:

$$z_{\max} = z(4, 4) = 4 \cdot 4 \cdot (12 - 4 - 4) = 64.$$

Ответ:  $z_{\max} = z(4, 4) = 64$ .

### **Задание 15.**

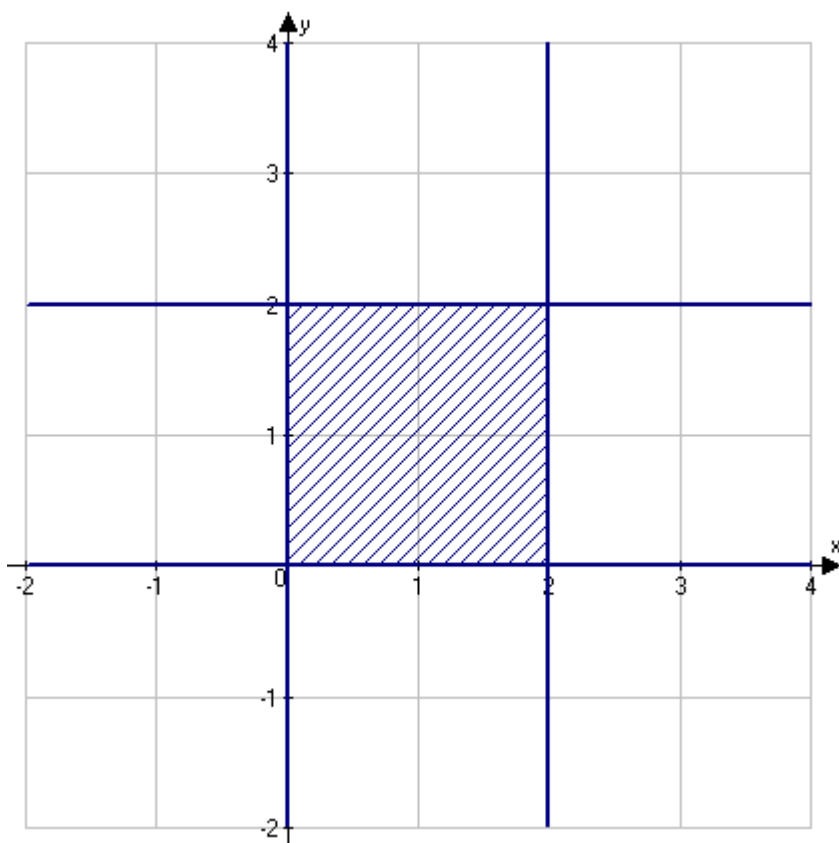
Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 - 2xy + 2,5y^2 - 2x$  в области  $D$ :

$$x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = 2.$$

Решение.

Своего наибольшего и наименьшего значений в заданной области функция может достигать либо в экстремальной точке, принадлежащей заданной области, либо на границе области.

Рассмотрим заданную область, которая представляет собой прямоугольник:



Найдём стационарные точки функции из системы 
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Для заданной функции система примет вид 
$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = 0 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}.$$

$$x = 1 + y$$

$$2(1 + y) - 5y = 0$$

$$3y = 2$$

$$y = \frac{2}{3}$$

$$x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Получили координаты стационарной точки  $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$ . Эта точка лежит внутри области  $D$ .

Исследуем функцию на границе области  $D$ .

При  $x = 0$  заданная функция становится функцией одного аргумента  $y$ :

$$z(0, y) = 2,5y^2, (0 \leq y \leq 2).$$

Найдём стационарные точки функции  $z(0, y) = 2,5y^2$ :

$$z'_y(0, y) = 5y = 0$$

$$y = 0$$

Получили стационарную точку  $(0, 0)$ . Она лежит на границе области  $D$  и является угловой точкой области  $D$ .

При  $x = 2$  заданная функция становится функцией одного аргумента  $y$ :

$$z(2, y) = 2,5y^2 - 4y, (0 \leq y \leq 2).$$

Найдём стационарные точки функции  $z(2, y) = 2,5y^2 - 4y$ :

$$z'_y(2, y) = 5y - 4 = 0$$

$$y = \frac{4}{5}$$

Получили стационарную точку  $\left(2, \frac{4}{5}\right)$ . Она лежит на границе области  $D$ .

При  $y = 0$  заданная функция становится функцией одного аргумента  $x$ :

$$z(x, 0) = x^2 - 2x, (0 \leq x \leq 2).$$

Найдём стационарные точки функции  $z(x, 0) = x^2 - 2x$ :

$$z'_x(x, 0) = 2x - 2 = 0.$$

$$x = 1$$

Получили стационарную точку  $(1, 0)$ . Она лежит на границе области  $D$ .

При  $y = 2$  заданная функция становится функцией одного аргумента  $x$ :

$$z(x, 2) = x^2 - 6x + 10, (0 \leq x \leq 2).$$

Найдём стационарные точки функции  $z(x, 2) = x^2 - 6x + 10$ :

$$z'_x(x, 2) = 2x - 6 = 0.$$

$$x = 3$$

Получили стационарную точку  $(3, 2)$ . Она не лежит на границе области  $D$ .

Таким образом, на границе области мы получили три стационарные точки:  $(0, 0)$ ,

$\left(2, \frac{4}{5}\right)$ ,  $(1, 0)$ . Мы также имеем одну стационарную точку  $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$  внутри заданной области.

Найдём значения функции в найденных стационарных точках, а также в угловых точках области:

$$z(0, 0) = 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2,5 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 = 0,$$

$$z\left(2, \frac{4}{5}\right) = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} + 2,5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 2 \cdot 2 = -\frac{8}{5} = -1,6,$$

$$z(1, 0) = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 2,5 \cdot 0^2 - 2 \cdot 1 = -1,$$

$$z\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} + 2,5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{3} = -\frac{5}{3} \approx -1,667,$$

$$z(0, 2) = 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 2 + 2,5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0 = 10,$$

$$z(2, 0) = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2,5 \cdot 0^2 - 2 \cdot 2 = 0,$$

$$z(2, 2) = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2,5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 2.$$

Сравнивая найденные значения функции, делаем вывод, что в заданной области наименьшее значение функции равно  $z_{\min} = z\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3}$ , наибольшее значение  $z_{\max} = z(0, 2) = 10$ .